Défis 1ère Spé maths : Second degré parabole - Thiaude P.

Défi SECDEG 01 **déterminer a, b et c**

On munit le plan d'un repère orthogonal. La parabole représentative de $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des abscisses en $E(3\,;0)$ et $F(7\,;0)$.
On précise que $A(1\,;\,-6)$ appartient à cette parabole. Déterminer a, b et c.

Corrigé

On va d'abord chercher une forme factorisée de $f(x)$, en déduire la forme développée qui permettra l'identification des coefficients a,b et c.

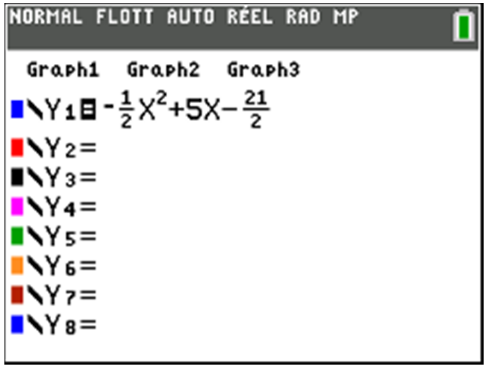
Notons $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f dans le repère orthogonal : $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points, E et F, d'abscisses respectives 3 et 7, autrement dit l'équation $f(x) = 0$ admet pour solutions : 3 et 7, par conséquent pour tout réel x : $f(x) = a(x-3)(x-7)$.
Or, $f(1) = -6$ donc : $a(1-3)(1-7) = -6$, qui s'écrit : $a \times (-2) \times (-6) = -6$ ou encore : $a = \dfrac{-6}{(-2)\times(-6)}$, soit finalement : $a = -\dfrac{1}{2}$.
On a donc :

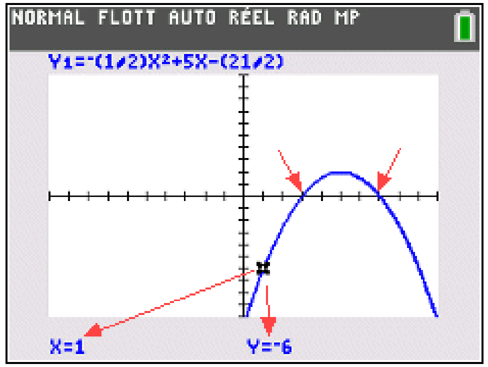
$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x-7) = -\frac{1}{2}(x^2 - 7x - 3x + 21) = -\frac{1}{2}(x^2 - 10x + 21)$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{10}{2}x - \frac{21}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{21}{2}$$

On a : $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 5x - \dfrac{21}{2}$, qui est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 5$ et $c = -\dfrac{21}{2}$.

Conclusion

$$a = -\frac{1}{2}, b = 5 \text{ et } c = -\frac{21}{2}$$

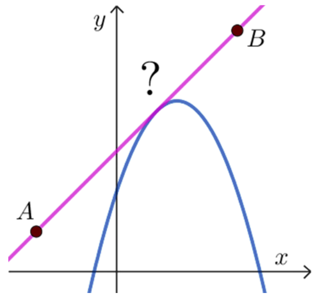




Défi SECDEG 02 **Intersection de la parabole avec une droite oblique**

Dans un repère orthogonal on note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 3x + 2$.

On note $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(-2\,;1)$ et $B(3\,;6)$.
Étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$: nombre de point(s) en commun et coordonnées de ce(s) point(s).



Corrigé

La droite (AB) admet pour équation $y = a(x - x_A) + y_A$ avec :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-1}{3-(-2)} = \frac{5}{3+2} = \frac{5}{5} = 1$$

On obtient donc : $y = 1\big(x - (-2)\big) + 1$ qui s'écrit aussi : $y = x + 2 + 1$ soit finalement $y = x + 3$.
Pour étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ il s'agit de résoudre le système :
$\begin{cases} y = x + 3 \ (*) \\ y = f(x) \end{cases}$ autrement dit : $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + 3x + 2 \end{cases}$ d'où, par comparaison :

$$x + 3 = -x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow x + 3 + x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

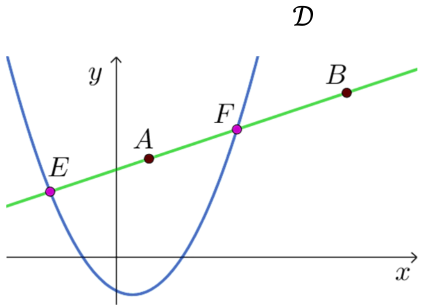
En remplaçant x par sa valeur dans $(*)$ on obtient : $y = 1 + 3 = 4$.

Conclusion La parabole $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ ont un seul point en commun : $I(1\,;4)$.

Défi SECDEG 03 Intersection de la parabole avec une droite oblique

Dans un repère orthogonal on note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f définie par :

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x+1)$$



La droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1;3)$ et $B(7;5)$ coupe $\mathcal{P}$ en E et F avec $x_E < x_F$.

Un élève affirme que A est le milieu de $[EF]$: que penser de cette affirmation ?

Corrigé

La droite (AB) admet pour équation $y=a(x-x_A)+y_A$ avec :

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{5-3}{7-1}=\frac{2}{6}=\frac{2\times 1}{2\times 3}=\frac{1}{3}$$

On obtient donc :

$$y=\frac{1}{3}(x-1)+3$$
$$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}+\frac{9}{3}$$
$$y=\frac{1}{3}x+\frac{-1}{3}+\frac{9}{3}$$
$$y=\frac{1}{3}x+\frac{-1+9}{3}$$
$$y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$$

La droite (AB) admet pour équation réduite $y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$

Pour obtenir les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ on résout le système :

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3} \\ y=f(x) \end{cases}$$

autrement dit :

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3} \\ y=\frac{1}{2}(x-2)(x+1) \end{cases}$$

d'où, par comparaison :

$$\frac{1}{2}(x-2)(x+1)=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2+x-2x-2)=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2-x-2)-\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1-\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{6}x-\frac{2}{6}x-\frac{3}{3}-\frac{8}{3}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x-\frac{11}{3}=0$$
$$\Leftrightarrow 6\times\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x-\frac{11}{3}\right)=6\times 0 \Leftrightarrow \frac{6}{2}x^2-6\times\frac{5}{6}x-6\times\frac{11}{3}=0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-5x-22=0$$

$3x^2-5x-22$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=3$, $b=-5$, $c=-22$,
de discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(3)(-22)=25+264=289$
$\Delta>0$ donc l'expression $3x^2-5x-22$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+5-\sqrt{289}}{2(3)}=\frac{+5-17}{6}=\frac{-12}{6}=-2$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{+5+\sqrt{289}}{2(3)}=\frac{+5+17}{6}=\frac{22}{6}=\frac{11}{3}$$

- si $x=-2$

$$y=\frac{1}{3}(-2)+\frac{8}{3}=\frac{-2}{3}+\frac{8}{3}=\frac{-2+8}{3}=\frac{6}{3}=2$$

- si $x=\frac{11}{3}$

$$y=\frac{1}{3}\left(\frac{11}{3}\right)+\frac{8}{3}=\frac{1\times 11}{3\times 3}+\frac{8\times 3}{3\times 3}=\frac{11}{9}+\frac{24}{9}=\frac{11+24}{9}=\frac{35}{9}$$

Comme $x_E < x_F$ on en déduit que :

$$E(-2\,;2) \text{ et } F\left(\frac{11}{3}\,;\frac{35}{9}\right)$$

Le milieu I de $[EF]$ a pour coordonnées :

$$x_I=\frac{x_E+x_F}{2} \text{ et } y_I=\frac{y_E+y_F}{2}$$

d'où en particulier :

$$x_I=\frac{x_E+x_F}{2}=\frac{-2+\frac{11}{3}}{2}=\frac{\frac{-6}{3}+\frac{11}{3}}{2}=\frac{\frac{-6+11}{3}}{2}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{1}}=\frac{5}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5\times 1}{3\times 2}=\frac{5}{6}$$

Or $x_A=1$ donc $x_I \neq x_A$ par conséquent $I \neq A$.

Conclusion

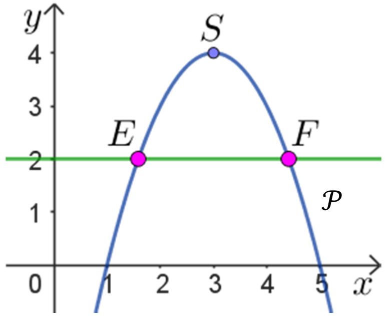
A n'est pas le milieu de $[EF]$ donc l'**affirmation de l'élève est fausse**.

Défi SECDEG 04 **parabole, étude d'un possible alignement**

Dans un repère orthogonal d'origine O on note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

On note S le sommet de $\mathcal{P}$, E et F les points d'intersection entre $\mathcal{P}$ et la droite d'équation $y = 2$ avec $x_E < x_F$.



1. Donner la forme canonique de $f(x)$.
   En déduire les coordonnées de S.
2. Calculer $\det(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OS})$: la droite (ES) passe-t-elle par O ?

Corrigé

1. On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 6x - 5 \\ &= -[x^2 - 6x + 5] \\ &= -[(x)^2 - 2(x)(3) + (3)^2 - 9 + 5] \\ &= -[(x-3)^2 - 4] \\ &= -(x-3)^2 + 4 \end{aligned}$$

On a donc, pour tout réel x : $\boldsymbol{f(x) = -(x-3)^2 + 4}$ $(forme\ canonique)$.
On reconnaît la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -1$, $\alpha = 3$ et $\beta = 4$.
Le sommet S a pour coordonnées $x_S = \alpha$ et $y_S = \beta$ donc $\boldsymbol{S(3\,;4)}$.

2. Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et d sont les solutions du système : $\begin{cases} y = 2 \\ y = f(x) \end{cases}$ autrement dit : $\begin{cases} y = 2 \\ y = -(x-3)^2 + 4 \end{cases}$

d'où par comparaison :

$$2 = -(x-3)^2 + 4 \Leftrightarrow 2 + (x-3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - 3 + \sqrt{2}\right)\left(x - 3 - \sqrt{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3 + \sqrt{2} = 0 \;\; ou \;\; x - 3 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{2} \;\; ou \;\; x = 3 + \sqrt{2}$$

Or $x_E < x_F$ et $y_E = y_F = 2$ donc : $E(3-\sqrt{2}\,;2)$ et $F(3+\sqrt{2}\,;2)$.

On a :

$$\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix} x_E - x_O \\ y_E - y_O \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OE}\begin{pmatrix} 3 - \sqrt{2} - 0 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OE}\begin{pmatrix} 3 - \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

On obtient de même : $\overrightarrow{OS}\begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 4 - 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{OS}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Donc :

$$\det(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OS}) = \begin{vmatrix} 3 - \sqrt{2} & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \left(3 - \sqrt{2}\right)(4) - (3)(2) = 12 - 4\sqrt{2} - 6$$
$$= 6 - 4\sqrt{2}$$

On constate que $\det(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OS}) \neq 0$ donc $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OS}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent les points O, E et S ne sont pas alignés, autrement dit **la droite (ES) ne passe pas par le point O**.

Défi SECDEG 05 **Intersection de la parabole avec une droite oblique**

Dans un repère orthogonal on considère $A(1;3)$ et $B(4;9)$, on note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+3)(-x+6)$.
Déterminer les coordonnées du(des) point(s) commun(s) à $\mathcal{P}$ et (AB).

Corrigé

Une équation de la droite (AB) est $y = a(x - x_A) + y_A$ avec :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-3}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$

On obtient : $y = 2(x-1) + 3$ qui s'écrit aussi : $y = 2x + 1$.
La droite (AB) admet pour équation réduite : $y = 2x + 1$.
Les coordonnées des points communs à $\mathcal{P}$ et (AB) sont les solutions du système :
$\begin{cases} y = ax + b \\ y = f(x) \end{cases}$ autrement dit : $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = (2x+3)(-x+6) \end{cases}$ d'où par comparaison :

$$2x + 1 = (2x+3)(-x+6) \Leftrightarrow 2x + 1 = -2x^2 + 12x - 3x + 18$$
$$\Leftrightarrow 2x + 1 = -2x^2 + 9x + 18 \Leftrightarrow 2x + 1 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 17 = 0$$

$2x^2 - 7x - 17$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2, b = -7$, $c = -17$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(-17) = 49 + 136 = 185$.
$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 - \sqrt{185}}{2(2)} = \frac{7 - \sqrt{185}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 + \sqrt{185}}{2(2)} = \frac{7 + \sqrt{185}}{4}$$

- si $x = \frac{7 - \sqrt{185}}{4}$

$$y = 2x + 1 = 2 \times \frac{7 - \sqrt{185}}{4} + 1 = \frac{7 - \sqrt{185}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{7 - \sqrt{185} + 2}{2} = \frac{9 - \sqrt{185}}{2}$$

• si $x = \frac{7+\sqrt{185}}{4}$

$$y = 2x + 1 = 2 \times \frac{7+\sqrt{185}}{4} + 1 = \frac{7+\sqrt{185}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{7+\sqrt{185}+2}{2} = \frac{9+\sqrt{185}}{2}$$

Conclusion

$\mathcal{P}$ et (AB) ont en commun les deux points :

$$E\left(\frac{7-\sqrt{185}}{4} ; \frac{9-\sqrt{185}}{2}\right) \text{ et } F\left(\frac{7+\sqrt{185}}{4} ; \frac{9+\sqrt{185}}{2}\right)$$

1	f(x):=(2x+3)(-x+6) → $f(x) := -2x^2 + 9x + 18$
2	A:=(1,3) → $A := (1, 3)$
3	B:=(4,9) → $B := (4, 9)$
4	d:=Droite(A, B) → $d : y = 2x + 1$
5	Intersection(f, d) → $\left\{\left(\frac{-\sqrt{185}+7}{4}, \frac{-\sqrt{185}+9}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{185}+7}{4}, \frac{\sqrt{185}+9}{2}\right)\right\}$